

# ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У БУРИЛЬНІЙ КОЛОНІ З УРАХУВАННЯМ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ЧИННИКІВ ПРУЖНОСТІ ТА В'ЯЗКОСТІ В КРАЙОВИХ ОБЛАСТЯХ

В.В. Перепічка, В.В. Турлич, Т.М. Даляк, В.Д. Яцишин

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42123,  
e-mail: [opt@nuing.edu.ua](mailto:opt@nuing.edu.ua)

Отримано аналітичний розв'язок задачі про динаміку пружного стрижня під впливом зосереджених чинників пружності та в'язкості локалізованих в торцевих областях. Відповідний підбір параметрів, що моделюють реакцію пружного масиву в робочій області та конструктивні особливості закріплення, дає можливість використовувати аналітичний розв'язок крайової задачі під час аналізу хвильових процесів у бурильній колоні як в період поширення збурення, так і в усталених режимах коливань.

Ключові слова: бурильна колона, стрижень, коливання, в'язкість, пружність.

Получено аналитическое решение задачи динамики упругого стержня с сосредоточенными факторами упругости и вязкости на торцах. При соответствующем выборе параметров, моделирующих реакцию упругого массива в рабочей области и конструкционные особенности закрепления, полученные результаты могут использоваться для анализа волновых процессов в бурильной колонне как при распространении возмущения, так и при установившемся режиме колебаний.

Ключевые слова: бурильная колонна, стержень, колебания, вязкость.

The analytical solution of the dynamics problem for elastic rod with concentrated elasticity and viscosity on the ends is obtained. With an appropriate choice of parameters, the results can be used to analyze the wave propagation in drill pipe as the propagation of a disturbance in period and at steady state oscillation.

Keywords: rod, drill column, oscillation, viscosity.

У даній роботі отримано аналітичний розв'язок задачі про коливання простого стрижня, в якому шляхом врахування зосереджених чинників в'язкості та пружності в крайових областях моделюється відгук пружного масиву та конструктивних елементів закріплення бурильної колоні на технологічне збурення в робочій області. За отриманими результатами можливо визначити кінематичну і деформівну складову процесу коливань, зрозуміти тенденції динамічної жорсткості системи залежно від конструктивних та геологічних (параметри в'язкості та пружності) чи технологічних (прикладене збурення, навантаження на долото) чинників. Принагідно слід зауважити, що аналітична форма подання розв'язку може бути використана при натурному експериментальному моделюванні.

Змоделюємо бурильну колонну як простий пружний стрижень, орієнтований вертикально, з постійною по довжині площею поперечного перерізу ( $A$ ). До торців стрижня прикладені зосереджені сили: до нижнього  $P_1 = \sigma_1 \cdot A$  та верхнього  $P_2 = \sigma_2 \cdot A$ , спрямовані в напрямку, протилежному напрямку дії сили його ваги. В'язкі та пружні елементи на нижньому торці моделюють дію пружного масиву і характеризуються, відповідно, коефіцієнтами в'язкості  $\gamma_1$  та пружності  $c_1$ , а на верхньому – конструктивних елементів закріплення колоні ( $\gamma_2$ ,  $c_2$ ).

При відповідному підборі параметрів на торці можна отримати умови жорсткого затиснення або вільного краю. Система відліку є нерухомою системою координат, початок якої збігається з центром ваги нижнього торця у початковій конфігурації та напрямом осі  $Ox$  вздовж стрижня. За початковий момент часу приймається момент прикладання збурюючого навантаження ( $P_0(t) = \sigma_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot A$ ) до відлікової конфігурації заданої пружної системи. Можливість упору в процесі руху в даній роботі не розглядається.

Розглядаємо стрижень як систему з розподіленими параметрами, рівняння руху перерізів якого під час поздовжніх коливань [1] у фізичних змінних зводиться до одномірної хвильової рівняння з правою частиною, що визначається гравітаційною складовою маси стрижня:

$$\frac{\partial^2 u_{\Sigma}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_{\Sigma}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} g. \quad (1)$$

Тут позначено:  $u_{\Sigma}(x, t)$  – переміщення перерізу стрижня в актуальній конфігурації;  $c = \sqrt{E/\rho}$  – швидкість поширення хвиль в стрижні;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – густина матеріалу стрижня;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Крайові умови в фізичних змінних:

$$AE \cdot \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\sigma_1 \cdot A - \sigma_0 \cdot A \cdot \sin(\omega t) + \gamma_1 \cdot \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=0} + c_1 \cdot u_{\Sigma}(x, t) \Big|_{x=0}; \quad (2)$$

$$AE \cdot \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \sigma_2 \cdot A - \gamma_2 \cdot \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l} - c_2 \cdot u_{\Sigma}(x, t) \Big|_{x=l}$$

Початкові умови:

$$u_{\Sigma}(x, 0) = u_{st}(x), \quad \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Подано шукані переміщення перерізів стрижня в актуальній конфігурації як суму статичної та динамічної складових ( $u_{\Sigma}(x, t) = u_{st}(x) + u_{dn}(x, t)$ ). Послугуючись підходом роботи [2], з метою спрощення аналізу отриманих результатів перейдемо до обезрозмірених змінних  $\tau = \frac{ct}{l}$ ,  $\xi = \frac{x}{l}$  та перепозначимо  $u(\xi, \tau) \equiv \frac{u_{dn}(\xi, \tau)}{l}$ . Після певних спрощень отримаємо подання крайової задачі (1) – (3) для визначення динамічної складової усереднених за площею переміщень перерізів стрижня:

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0. \quad (4)$$

Початкові умови:

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Крайові умови:

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot \sin(v\tau) + \beta_1 \cdot \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\xi=0} + k_1 \cdot u(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -\beta_2 \cdot \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\xi=1} - k_2 \cdot u(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1}.$$

Тут позначено

$$\beta_i = \frac{\gamma_i \cdot c}{AE} = \frac{\gamma_i}{A\rho \cdot c} = \frac{\gamma_i}{A\sqrt{\rho \cdot E}},$$

$$k_i = \frac{c_i}{AE/l}, \quad v = \frac{l \cdot \omega}{c}.$$

Скористаємось методами операційного числення [4,5], застосувавши до розв'язання сформульованої задачі перетворення Лапласа. Нехай

$$u(\xi, \tau) \sim U(\xi, p) \Leftrightarrow U(\xi, p) = \int_0^{\infty} u(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Переходячи в рівнянні до зображень і враховуючи нульові початкові умови для динамічної складової розв'язку, отримаємо операційний еквівалент задачі (4) – (6) у вигляді звичайного диференційного рівняння для функції трансформанти

$$U_{\xi\xi}(\xi, p) - p^2 U(\xi, p) = 0$$

та відповідних крайових умов

$$U_{\xi}(0, p) = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) + \beta_1 \cdot p \cdot U(0, p) + k_1 \cdot U(0, p);$$

$$U_{\xi}(a, p) = -\beta_2 \cdot p \cdot U(a, p) - k_2 \cdot U(a, p).$$

Тут і надалі для зручності сприйняття подань скористаємось позначеннями:

$$a \equiv 1,$$

$$f(t) = \sin(vt) \sim F(p) \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Загальний розв'язок отримуємо у вигляді

$$U(\xi, p) = C_1 e^{-p\xi} + C_2 e^{p\xi} \quad \text{і з крайових умов визначаємо константи:}$$

$$C_1 = \frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) \cdot \frac{1}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \times \frac{1}{\left[ 1 - \frac{[k_1 + (\beta_1 - 1) \cdot p]}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \cdot \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \cdot e^{-2pa} \right]};$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) \cdot \frac{1}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \cdot \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \cdot e^{-2pa} \cdot \left[ 1 - \frac{[k_1 + (\beta_1 - 1) \cdot p]}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \cdot \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \cdot e^{-2pa} \right].$$

Таким чином, розв'язок поставленої задачі в образах може бути поданий у таких варіантах (перша форма зручна для асимптотичного аналізу, з другої легко отримати фізично обумовлену хвильову картину):

$$U(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) \cdot \frac{1}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \times \frac{e^{-p\xi} + \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \cdot e^{p(\xi - 2a)}}{\left[ 1 - \frac{[k_1 + (\beta_1 - 1) \cdot p]}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \cdot \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \cdot e^{-2pa} \right]} =$$

$$= \frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[k_1 + (\beta_1 - 1) \cdot p]^n}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]^{n+1}} \cdot \left( \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \right)^n \times$$

$$\times \left[ e^{-p(\xi + 2na)} + \left( \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \right) \cdot e^{p(\xi - 2(n+1)a)} \right].$$

Для спрощення подання оригіналу подамо трансформанту у вигляді:

$$U(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{[k_1 + (\beta_1 - 1) \cdot p]}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \right)^n \times \right. \\ \times \left( \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \right)^n \times \left[ \frac{F(p) \cdot e^{-p(\xi + 2na)}}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} + \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{[k_2 + (\beta_2 - 1) \cdot p]}{[k_2 + (\beta_2 + 1) \cdot p]} \right) \cdot \frac{F(p) \cdot e^{p(\xi - 2(n+1)a}}{[k_1 + (\beta_1 + 1) \cdot p]} \right] \right\}.$$

Скориставшись теоремою про згортку і еквівалентністю записів

$$\int_0^{\tau} f(\tau - s) H(s - \xi) ds \equiv \int_0^{\tau - \xi} f(s) ds$$

(тут і надалі  $H(\tau)$  – функція Хевісайда), після обернення трансформанти можна отримати подання оригіналу в такому вигляді:

$$u(\xi, t) = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ \Psi(t, 0) + X(t, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (\Delta_1 \cdot \Delta_2)^n [\Psi(t, n) + X(t, n)] + \int_0^t \left\{ [\Psi(t - \tau, n) + X(t - \tau, n)] \times \right. \right. \right. \\ \times [\Phi(\tau, n, \Omega_1) + \Phi(\tau, n, \Omega_2)] \Big\} d\tau + \left. \left. + \int_0^t [\Psi(t - \tau, n) + X(t - \tau, n)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^{\tau} [\Phi(\tau - s, n, \Omega_1) \cdot \Phi(s, n, \Omega_2)] ds d\tau \right\} \right\}$$

Тут прийнято наступні позначення:

$$\Delta_1 = \frac{(\beta_1 - 1)}{(\beta_1 + 1)}; \Delta_2 = \frac{(\beta_2 - 1)}{(\beta_2 + 1)};$$

$$\Omega_1 = \frac{k_1}{(\beta_1 + 1)}; \Omega_2 = \frac{k_2}{(\beta_2 + 1)};$$

$$\Phi(t, n, \Omega_m) = e^{-\Omega_m \cdot t} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^n C_n^i (\Delta_m)^{n-i} \left( \frac{2 \cdot \Omega_m}{(\beta_m + 1)} \right)^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}, \quad m = 1, 2;$$

$$\Psi(t, n) = \frac{1}{(\beta_1 + 1)} \times$$

$$\times \int_0^{t - \xi - 2na} \sin(v\tau) e^{-\frac{k_1}{(\beta_1 + 1)}(t - \tau - \xi - 2na)} d\tau \cdot H(t - \xi - 2na);$$

$$X(t, n) = B \cdot \int_0^{t + \xi - 2(n+1)a} \sin(v\tau) e^{-\frac{k_1}{(\beta_1 + 1)}(t - \tau + \xi - 2(n+1)a)} d\tau \times \\ \times H(t + \xi - 2(n+1)a) + \\ + D \cdot \int_0^{t + \xi - 2(n+1)a} \sin(v\tau) e^{-\frac{k_2}{(\beta_2 + 1)}(t - \tau + \xi - 2(n+1)a)} d\tau \times \\ \times H(t + \xi - 2(n+1)a), \\ B = \frac{(\beta_2 - 1)}{(\beta_2 + 1)(\beta_1 + 1)} - \\ - \frac{2 \cdot k_2}{(\beta_2 + 1)^2 (\beta_1 + 1)} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{k_1}{(\beta_1 + 1)} - \frac{k_2}{(\beta_2 + 1)} \right]}, \\ D = \frac{2 \cdot k_2}{(\beta_2 + 1)^2 (\beta_1 + 1)} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{k_1}{(\beta_1 + 1)} - \frac{k_2}{(\beta_2 + 1)} \right]}.$$

Таким чином, наведені вище подання визначають розв'язок крайової задачі (4) – (5).

Розв'язок вихідної крайової задачі (1) – (3)  $u_{\Sigma}(x, t) = u_{st}(x) + u_{dn}(x, t)$  отримуємо після подання статичної складової переміщень стрижня:

$$\frac{u_{\Sigma}(\xi, \tau)}{l} = \frac{l \cdot g}{2c^2} \left( \xi^2 - \frac{(2 + k_2)(1 + k_1 \xi)}{k_1 + k_2 + k_1 k_2} \right) + \\ + \frac{\sigma_1}{E} \cdot \frac{1 + k_2(1 - \xi)}{k_1 + k_2 + k_1 k_2} + \frac{\sigma_2}{E} \cdot \frac{1 + k_1 \xi}{k_1 + k_2 + k_1 k_2} + \\ + u(\xi, \tau).$$

В роботі [3] вказано, що відгук пружного півпростору на збурення можна моделювати пружиною, котра з'єднана паралельно з в'язким елементом. Енергія, що розсіюється цим елементом, відповідає енергії випромінювань в півпростір під час коливаний. Жорсткість пружини можна визначати незалежно від частоти, беручи її рівною статичній жорсткості півпростору.

Як приклад, наведемо кінематичний аналіз колони залежно від приведених параметрів задачі. Приймаємо, що довжина бурової колони  $l = 2000 \text{ м}$ , площа  $A = 30,78 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , модуль Юнга  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , густина  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ , швидкість поширення хвилі  $c = 5,2 \text{ км/с}$ , частота обертання колони  $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$  (приведена частота  $\nu = 4$ ). Вважаємо, що закріплення верху бурової колони реалізується через конструктивний елемент з жорсткістю  $c_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$  і в'язкістю  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ . Відгук пружного масиву моделюємо пружиною, з'єднаною паралельно з в'язким елементом. На рис. 1 наведено графіки переміщень по довжині колони і в часі для значень параметрів основи: жорсткості  $c_1 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$  (рис. 1а) та  $c_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$

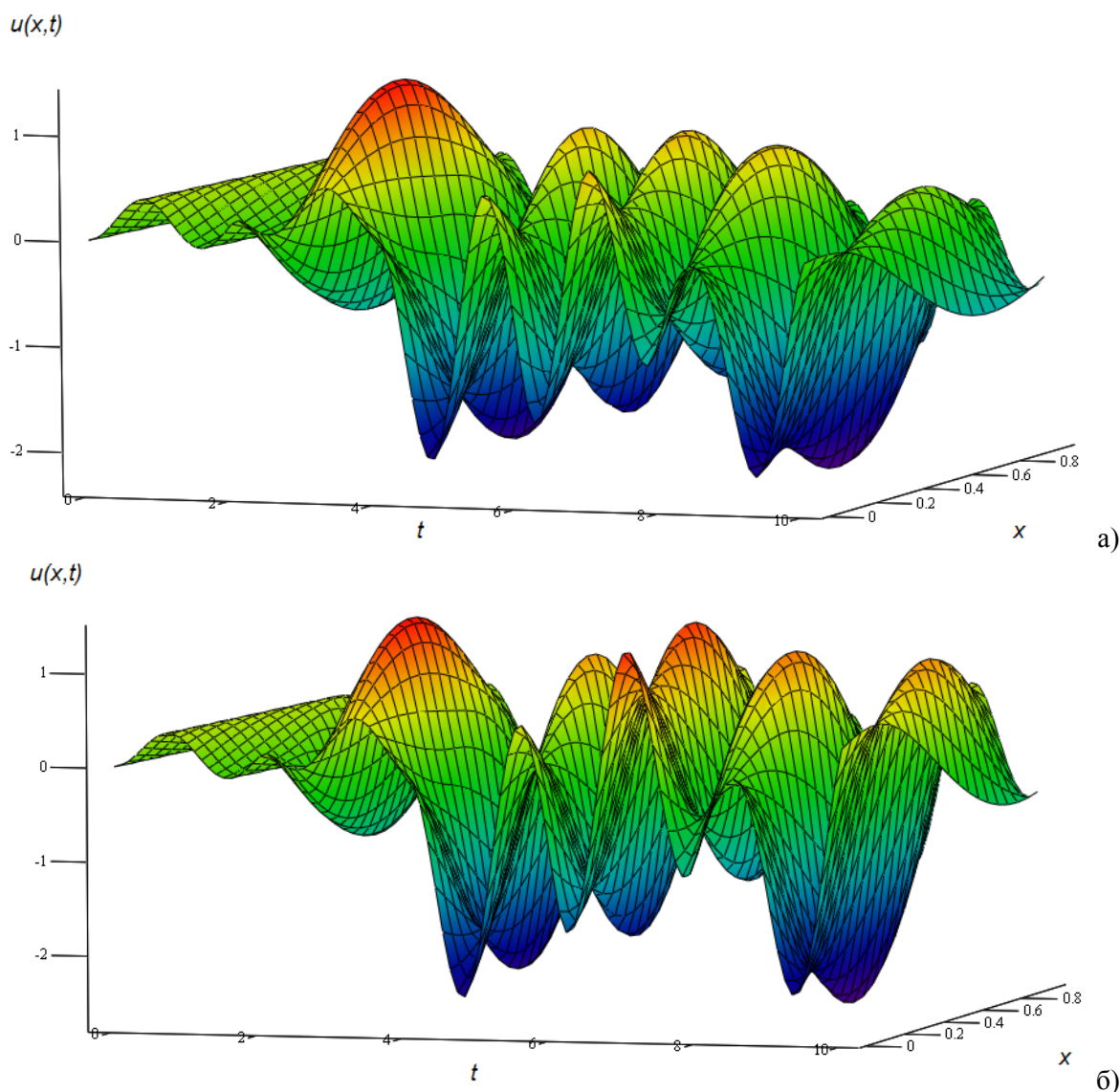


Рисунок 1 – Залежності переміщень від часу вздовж бурильної колонни

(рис. 1б) і в'язкості  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}$  [6, 7]. На наведених графіках динамічних складових переміщень видно, що внаслідок втрат енергії, пов'язаних з дисипативним розсіюванням, становлення усталеного режиму коливань настає досить швидко. З розв'язку задачі можна побачити, що зосереджена в'язкість, окрім демпфування, впливає ще і на жорсткість пружини у поданні для переміщень.

### Література

- 1 Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху: підручник / М.В.Василенко, О.М.Алексейчук. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.
- 2 Перепічка В.В. Вплив в'язких конструктивних елементів у закріпленні на динаміку бурильної колонни при повздовжніх коливаннях // В.В.Перепічка, В.В.Тирлич, Т.М.Даляк, М.Й.Бурда // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2010. – № 2(35). – С. 89–92.
- 3 Джонсон К. Механика контактного взаимодействия; пер. с англ. / К.Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

4 Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. / Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

5 Слепьян Л.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.С.Слепьян, Ю.С.Яковенко. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

6 Векерик В.И. Инструкция по применению виброзащитных устройств компоновке бурильной колонны при бурении вертикальных скважин / В.И. Векерик, В.М. Мойсшин. – Ивано-Франковск, 1986. – 87 с.

7 Юртаев В.Г. Динамика буровых установок / В.Г. Юртаев. – М.: Недра, 1987. – 155 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії  
15.09.10

Рекомендована до друку професором  
Мойсшиним В.М.